



# 土的清华弹塑性模型及其发展

李广信

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

摘要: 土的清华弹塑性模型具有独特的建模方式。在 Drucker 假说的基础上, 无需其他的附加假设, 通过试验资料直接确定塑性势面和塑性势函数, 选择适当的硬化参数使屈服函数与塑性势函数一致。通过真三轴试验及平面应变试验, 利用该模型的建模方法, 在  $\pi$  平面上确定了一种双圆弧的屈服轨迹, 从而建立了该模型的三维形式, 提出了相应的流动规则表达式; 在小浪底堆石料的三轴湿化试验基础上, 发现湿化应变作为一种塑性应变与通过该点的屈服面正交, 因而只需分别确定干土与饱和土的清华弹塑性模型的参数, 同时进行各向等压条件下的湿化试验, 测量其湿化体应变, 就可以计算出在任意应力状态下浸水湿化的应力应变全过程; 与湿化的清华模型相似, 进行了不同含水率的土的三轴试验, 并进行在干土试样中预加冰屑然后在指定应力状态下使其融化均匀增湿的三轴试验, 发现屈服函数不变, 硬化参数可以表示为塑性应变和含水率的函数, 从而绕过了基质吸力这一变量, 建立了非饱和土的清华模型, 试验表明它可以合理地预测从干试样增湿到其他含水率的应力应变全过程; 密实的永定河砂的试验表明, 在相同应力状态下, 应变硬化段与应变软化段的塑性应变增量的方向是一致的, 将硬化参数表示为塑性功的函数, 则可以描述土的应变软化, 模型试验结果表明了建立的反映应变软化的清华模型可以合理地计算浅基础的荷载沉降关系; 将等向硬化改为旋转硬化, 就可以计算砂土在减载和循环加载下的应力应变关系。清华弹塑性模型是一个具有很大发展空间的模型。

关键词: 土的本构关系; 弹塑性模型; 湿化; 非饱和土; 应变软化; 循环荷载

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2006)01-0001-10

作者简介: 李广信(1941-), 男, 1966 年清华大学水利系毕业, 后师从黄文熙先生从事土的本构关系研究, 在清华大学获得岩土工程专业工学硕士和博士学位, 现为清华大学教授, 博士生导师。编写教材 9 部, 发表论文 230 余篇, 曾获国家科技进步一等奖和国家自然科学三等奖。



## Characteristics and development of Tsinghua Elasto-plastic Model for soil

LI Guang-xin

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Unlike other elasto-plastic models of soil, Tsinghua Elasto-plastic Model was developed in a different way, in which the plastic potential surface and the function of the model was directly determined from experimental data without any other assumptions. According to the Drucker's postulation, the yield function was identical with plastic potential function by selecting proper hardening parameter. The yield locus of the model, formed by 2 circular arcs on  $\pi$  plane, was developed by using true triaxial tests and plane strain tests. A three-dimensional Tsinghua Model was then proposed and the three-dimensional flow rules were presented. Based on the wetting test results of Xiaolangdi rock fill, it was found that as a type of plastic strain, the wetting strain vector was normal to the yield locus of the model. Provided that the model parameters of dry soil and saturated soil and the wetting volumetric strain in isotropic compression test were determined, the whole stress-strain relationship during wetting of the sample could be simulated by the model. An unsaturated soil model was also developed following the similar approach to the wetting Tsinghua Model. In the triaxial test of unsaturated soil, some ice crumbs were mixed into the dry sample before test and the ice crumbs were melted at determined stress states. From the test results it was found that yield surfaces of soil with different

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50279014)

收稿日期: 2005-11-29

moisture contents were the same and hardening parameter was the function of plastic strain and Moisture content. In the Tsinghua Model for unsaturated soil, the strain increment produced by increments of stress and moisture content could be calculated conveniently without appearance of matrix suction. The whole stress-strain relationship in triaxial tests with increasing moisture contents was predicted by the model reasonably. Additionally, based on the behavior observed in triaxial compression tests with dense Yongding River sand, the model was still developed to simulate strain-softening characteristics of the sand, in which the hardening parameter was assumed to be the function of plastic work. The model was verified in computing the displacement vs. load of a shallow footing on dense sand by hydraulic gradient model tests. If the rotational kinematic hardening is applied in the model instead of isotropic hardening, it could be used to model the soil behavior with large stress reversals, by which stress strain relationship during load decreasing or cyclic loading can be simulated. It is thought that Tsinghua Elasto-plastic Model is a promising model for soil.

**Key words:** constitutive relationship of soil; elasto-plastic model; wetting; unsaturated soil; strain-softening; cyclic loading

## 0 前言

土的力学本构关系通常是指土的应力-应变-强度-时间关系,其数学表达式即为本构模型或者本构方程。作为天然地质材料的土体,由于其结构的非连续性和分布的随机性,在力学性能上一般表现出非线性、弹塑性、流变性、各向异性和非均质性;其应力-应变关系十分复杂,它与土的应力水平、应力历史和应力路径有关;也与土的状态、组成、结构、温度、环境等因素密切相关。早期土的变形计算主要是基于线弹性理论,而土的塑性理论应用的是完全塑性的模型,屈服准则与强度准则是一致的。在刚塑性和弹性-完全塑性模型的基础上,各种极限分析和极限平衡方法得到了发展。现代计算机技术为土的非线性分析提供了可能性,而大型土木工程的建设使这种分析成为必要。因而只有在20世纪60年代以后土的本构关系模型的研究才得以蓬勃发展。

Roscoe 与他的同事提出剑桥模型<sup>[1,2]</sup>,开创了土的增量弹塑性本构模型的先河。随后各国学者提出了上百种土的弹塑性本构模型,包括单一屈服面、双屈服面及多屈服面的模型。其主要特点是首先假设屈服面:有人基于土是摩擦材料这一认识,将屈服轨迹假设为一组直线或者是微弯的射线,在三维应力空间就是一组锥形屈服面;也有人看到在各向等压下土的明显的不可恢复的塑性体应变,而假设一组帽子屈服面,例如 Drucker 等就提出在 Mohr-Coulomb 锥形屈服面上再加上一组硬化帽形屈服面<sup>[3]</sup>;还有人假设土同时具有这两组屈服面,建立了双重屈服面弹塑性模型或者综合两种情况的普遍形式的屈服面。在为数众多土的弹塑性模型中,清华弹塑性模型以其独特的建模方法引起国内外学者的关注。黄文熙先生最早提出土的弹塑性模型的屈服面不应人为假设,应当通过试验结果直接确定塑性势函数,然后根据 Drucker 假说即相适应的流动规则,选择合适的硬化参数,使模型的屈

服面与塑性势面重合,建立土的弹塑性模型。在这一思想的指导下,在对各类土的大量的试验成果基础上,于20世纪70~80年代建立了土的清华弹塑性模型<sup>[4]</sup>,随后又发展了三维的弹塑性模型形式<sup>[5]</sup>。该模型在高土石坝、地基基础和桩基础工程<sup>[6,7]</sup>等方面得到了应用。在以后的20多年中,笔者继承这一建模思路,发展了这一模型,提出了计算土的湿化变形、非饱和土的增湿变形、反映土的应变软化、减载与循环加载的清华弹塑性模型。这表明清华模型具有很强大的扩展功能和发展空间,这些工作也进一步深化和发展了清华弹塑性模型,为它在工程方面的推广应用创造了条件。

## 1 土的清华弹塑性本构模型的建立

清华弹塑性模型是以黄文熙为首的清华大学研究组提出的。在这个模型中,除了 Drucker 公设以外,未作任何补充假设。它直接从土的试验资料确定塑性势函数  $g$ , 按照相适应流动法则,令  $g = f$ ; 然后确定合适的硬化参数,合理地反映土的应力应变关系。模型保证了解的惟一性。模型及其参数确定如下所述<sup>[9]</sup>。

### 1.1 弹性应变

模型的弹性应变部分采用  $K$ 、 $G$  参数计算。其中体变模量  $K$  从各向等压试验的卸载-再加载试验确定;剪切模量  $G$  从常规三轴压缩的卸载-再加载试验确定。其一般形式为

$$K = K_0 p \quad (1)$$

$$G = G_0 p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (2)$$

式中,  $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ;  $p_a$  为大气压力,量纲与  $\sigma_3$  相同;  $K_0$  与  $G_0$  是试验常数。

### 1.2 屈服面的确定

在三轴试验的结果中,计算各应力状态下的塑性应变  $\varepsilon_v^p$  与  $\bar{\varepsilon}^p$ , 绘制不同围压下三轴试验的  $\varepsilon_v^p - \bar{\varepsilon}^p$  关

系曲线,然后在  $p-q$  平面上对应的应力点处绘制其塑性应变增量方向,用图 1 (a) 所示的小箭头表示(它实际就是  $\varepsilon_v^p - \bar{\varepsilon}^p$  曲线对应于该应力点的切线方向)。图 1 表示的是承德中密砂的试验结果,将该图中的小箭头方向连线就如同“流线”;对应的与其正交的“等势线”即为塑性势轨迹。按照 Drucke 假说,  $f = g$ , 则塑性势轨迹即为其屈服轨迹。用适当的函数表示,即为屈服函数。

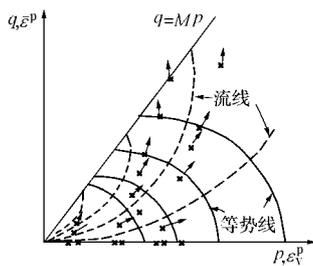
许多土的三轴试验结果表明,这个屈服轨迹大体上是一组比例椭圆,可以用下式表示:

$$f = g = \left(\frac{p-h}{kh}\right)^2 + \left(\frac{q}{krh}\right)^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

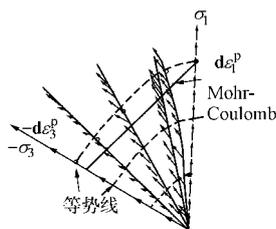
式中,  $q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2}$ ,  $h$

为硬化参数。 $r$ 、 $k$  是试验常数。设  $x = \frac{p}{q} = \frac{1}{\eta}$ ,  $z =$

$\arctan\left(-\frac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p}\right)$ 。可以用试验数据绘制图 2 所示的曲线,根据正交法则和式 (3) 确定试验常数  $r$ 、 $k$ 。



(a)  $p-q$  平面上



(b)  $\pi$  平面上

图 1 承德中密砂的屈服轨迹

Fig. 1 Yield locus of Chengde sand

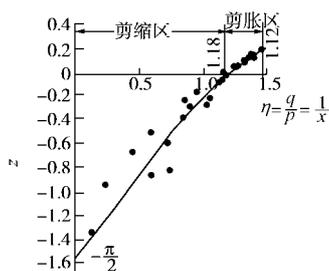


图 2 屈服函数中试验常数  $r$  与  $k$  的确定

Fig. 2 Determination of  $r$  and  $k$  in yield foundation

### 1.3 硬化参数的确定

对于各向等压的应力状态  $p = p_0$ ,  $q = 0$ , 式 (3) 可表示为

$$h = \frac{p_0}{1+k} \quad (4)$$

由于在各向等压试验中  $p_0$  与塑性体应变  $\varepsilon_{v0}^p$  有一一对应的试验关系,所以式 (4) 又可表示为  $\varepsilon_{v0}^p$  的函数。 $p_0$  与  $\varepsilon_{v0}^p$  之间试验关系可以表示为

$$p_0 = p_a \frac{1}{m_4} (\varepsilon_{v0}^p + m_6)^{m_5} \quad (5)$$

式中,  $m_4$ 、 $m_5$ 、 $m_6$  是试验常数。当然,  $p_0$  与  $\varepsilon_{v0}^p$  之间关系也可根据试验结果表示成其它的函数形式。

从式 (4) 和 (5) 可得到

$$h = \frac{p_a}{1+k} \frac{1}{m_4} (\varepsilon_{v0}^p + m_6)^{\frac{1}{m_5}} \quad (6)$$

在同一个屈服面上,硬化参数  $h$  是相等的。亦即在同一屈服面上,从式 (3) 与 (4) 相等得到

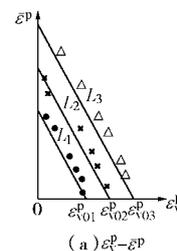
$$p_0 = \left[ \sqrt{k^2 p^2 + \frac{k^2 - 1}{r^2} q^2} - p \right] / (k - 1) \quad (7)$$

因而在同一个屈服面上,各向等压的塑性体应变  $\varepsilon_{v0}^p$  与其他应力状态的塑性体应变 ( $\varepsilon_v^p$ ,  $\bar{\varepsilon}^p$ ) 之间也应满足一定关系,以使该屈服面各点的硬化参数为常数。

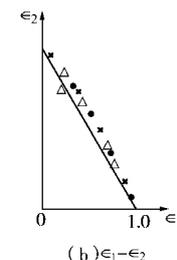
将所有试验得到的在同一屈服面上的  $\varepsilon_{v0}^p$  与 ( $\varepsilon_v^p$ ,  $\bar{\varepsilon}^p$ ) 之间的关系绘制在  $\varepsilon_v^p$  与  $\bar{\varepsilon}^p$  坐标系中,就得到一组直线,如图 3 (a) 所示,归一化以后得到图 3 (b) 所示的直线,其表达式为

$$\varepsilon_1 = 1 - m_3 \varepsilon_2 \quad (8)$$

式中,  $m_3$  表示图 3 (b) 中直线的斜率  $\varepsilon_1 = \varepsilon_v^p / \varepsilon_{v0}^p$ ,  $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}^p / \varepsilon_{v0}^p$ 。



(a)  $\varepsilon_v^p - \varepsilon^p$



(b)  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$

图 3 同一屈服面上的  $\varepsilon_v^p$  与  $\bar{\varepsilon}^p$  间的关系

Fig. 3 Relation of  $\varepsilon_v^p$  and  $\bar{\varepsilon}^p$  in a yield surface

将式 (8) 代入式 (6) 就得到硬化参数的表达式:

$$h = \frac{p_a}{1+k} \frac{1}{m_4} (m_6 + \varepsilon_v^p + m_3 \bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{m_5}} \quad (9)$$

可根据试验资料改变具体的函数形式,以求准确和简便为原则。在如上的函数形式中,有弹性试验常数  $K_0$ 、 $G_0$  和  $n$ , 屈服函数中常数  $k$ 、 $r$ , 硬化参数中的常数  $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$  和  $m_6$  共计 9 个试验常数。它们可从各向等压试验和常规压缩三轴试验及其卸载再加载试验确定。值得注意的是,该模型没有另外的强度准则,它的强度准则隐含在模型本身之中。

## 2 清华模型的三维形式

上述模型是在  $p-q$  应力平面上建立起来的。与应力洛德角  $\theta$  无关,这意味着其破坏轨迹和屈服轨迹在  $\pi$  平面上是圆周。这显然不符合土的实际情况。为了建立三维的弹塑性模型形式,首要的是确定屈服面在  $\pi$  平面上的轨迹的形状及函数表达式。图 1(b) 是从承德中密砂的真三轴试验和平面应变试验得到的  $\pi$  平面上的塑性应变增量方向。采用同样的原理和方法,可以得到  $\pi$  平面上的屈服轨迹。这种屈服轨迹可以用  $\pi$  平面上的两段相切的圆弧组成。试验与理论都证明了,在  $\pi$  平面上,屈服轨迹与破坏轨迹形状是相同的。所以其破坏轨迹与屈服轨迹可用图 4 的双圆弧示<sup>[5]</sup>。这两段圆弧的圆心,一个在  $\sigma_3$  轴上,一个在  $\sigma_1$  轴上,在  $\theta = \theta_0$  处相切。按照圆心与半径的不同,这两段双圆弧的组合可以有多种,对应于不同的轨迹形状。其中图 4 和图 1(b) 所示形状较为符合试验结果。

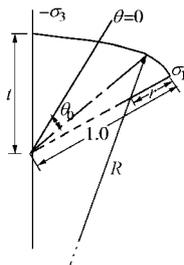


图 4  $\pi$  平面上的双圆弧屈服轨迹

Fig. 4 Two circular arcs yield locus in  $\pi$  plane

在三维形式的屈服方程中,需要引入一个形状参数  $\alpha(\theta)$ 。它表示了  $\pi$  平面上屈服轨迹的形状。试验表明,破坏面在  $\pi$  平面上的轨迹的形状与它是相同的。屈服面函数为

$$f = \left( \frac{p-h}{kh} \right)^2 + \left( \frac{q}{\alpha(\theta)krh} \right)^2 - 1 = 0 \quad (10)$$

相应的强度准则表示为

$$\frac{q}{p} = M_c \alpha(\theta) \quad (11)$$

其中  $M_c$  为常规三轴压缩试验得到的破坏应力比,

$M_c = \frac{q_c}{p}$ 。  $\alpha(\theta)$  可表示为如下形式:

当  $\theta > \theta_0$  时

$$\alpha_1 = \frac{1}{t(2t-1)} \left\{ [(1-t)^2 (2t^2+1)^2 \cos^2(30^\circ-\theta) + t^2 (2t-1)(2-2t+3t^2-2t^3)]^{\frac{1}{2}} - (1-t)(2t^2+1)\cos(30^\circ-\theta) \right\} \quad (12)$$

当  $\theta < \theta_0$  时:

$$\alpha_2 = \frac{1}{1+2t-2t^2} \left\{ [(1-t)^2 (2t^2+t+2)^2 \cos^2(30^\circ+\theta) + (1+2t-2t^2)(4t^3-4t^2+4t-3)]^{\frac{1}{2}} - (1-t)(2t^2+t+2)\cos(30^\circ+\theta) \right\} \quad (13)$$

$$\theta_0 = \arctan \frac{4t^3 - 4t^2 + t - 3}{\sqrt{3}(4t^3 + 3t + 1)} \quad (14)$$

其中  $t$  为三轴伸长 ( $\theta = 30^\circ$ ) 与三轴压缩 ( $\theta = -30^\circ$ ) 试验得到的强度比之比,即

$$t = \frac{M_t}{M_c} \quad (15)$$

式中,  $M_t$  为三轴伸长试验中破坏应力比  $M_t = \frac{q_t}{p}$ 。

在三维应力状态下,弹塑性模型的流动规则表示为

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial p} \\ \psi = \arctan \frac{\sin \theta \frac{\partial f}{\partial q} + \cos \theta \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial \theta}}{\cos \theta \frac{\partial f}{\partial q} - \sin \theta \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial \theta}} \\ d\bar{\varepsilon}^p = d\lambda \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + d\lambda \left( \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $\psi$  为塑性应变增量的洛德角。可见在这种三维模型中,  $\pi$  平面上应力向量的方向与塑性应变增量向量的方向是不一致的,亦即  $\pi$  平面上的屈服轨迹不是圆周。只需再作一个三轴伸长试验确定其强度和试验参数  $t$ , 就可以将二维模型推广到三维形式。清华三维弹塑性模型用于土石坝的计算,结果表明用它计算的坝体水平应力、水平位移和坝轴向的应力比二维模型更符合实际<sup>[6]</sup>。

## 3 反映湿化变形的清华弹塑性模型

干土浸水饱和时发生的变形叫湿化变形或者湿陷变形。不仅黄土有湿陷性,许多土都有湿化变形。高土石坝初次蓄水时,可能会由于堆石料的浸水湿化变形而发生坝体的沉降、侧移和应力的重分布,甚至导

致坝体和防渗体开裂和渗透破坏。堆石的湿化变形问题受到国内外专家的重视。

用饱和土和干土分别进行三轴试验，以其在相同应力状态下的应变差作为土的湿化变形的方法叫双线法；保持应力状态不变，将干土浸水饱和，量测其应变增量的方法叫单线法。可见单线法更符合土体湿化变形的实际情况，对很多土的研究表明，单线法的湿化应变比双线法明显偏大。

### 3.1 堆石料的湿化试验

采用相似模拟缩小小浪底土石坝的堆石料粒径，进行三轴湿化试验。试样直径为 150 mm，高 300 mm，采用高压三轴仪进行试验。图 5 表示了  $\sigma_3 = 300$  kPa 三轴试验的单线法与双线法的结果<sup>[10]</sup>。

### 3.2 屈服面与屈服函数

按照清华模型的建模原理，通过三轴试验资料和 Drucker 公设直接确定土的屈服轨迹，试验结果表明，在清华弹塑性模型中，干土与饱和土的屈服轨迹形状是相同的，见图 6 所示。屈服函数的表达式如式 (3) 所示，只是硬化参数中的试验常数不同。

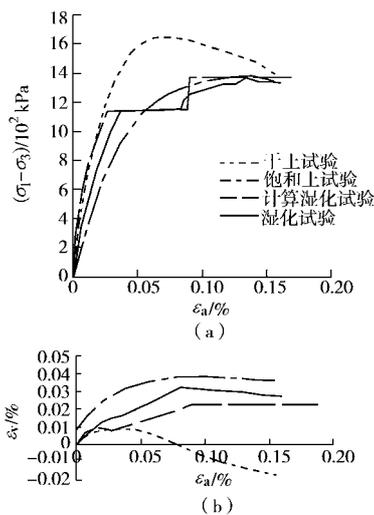


图 5 试验与计算的结果比较

Fig. 5 Comparison between numerical results and test results

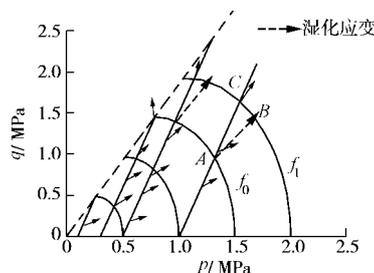


图 6 堆石料的屈服面与湿化应变的正交性

Fig. 6 Yield locus and normality of wetting strain to yield locus

在某一应力状态下的湿化变形是一种不可恢复的塑性变形，试验结果表明在一个应力状态下的湿化应变向量正交于通过该点的清华模型屈服面，见图 6。

这也表明湿化应变可以通过这个模型来描述。根据湿化应变的正交性，湿化应变的两个分量  $\bar{\epsilon}^s$ 、 $\epsilon_v^s$  的关系可表示为

$$\bar{\epsilon}^s = \left( \frac{\partial f}{\partial q} / \frac{\partial f}{\partial p} \right) \epsilon_v^s \quad (17)$$

### 3.3 硬化参数

分别进行干土试样和饱和土试样的三轴试验，用上述的方法分别建立干土与饱和土的硬化参数表达式，见式 (9)。由于在试验中，湿化前后的应力状态没有变化，这样在湿化前位于同一屈服面  $f_0$  上的所有应力状态的土样，浸水湿化后由于湿化塑性应变的增加，都向外扩张到另一个屈服面  $f_1$  上。这样就可以只需完成各向等压  $p_0$  应力状态的湿化试验，确定湿化前后的硬化参数之差，就可以计算在任意应力状态下的湿化应变。湿化前后的硬化参数之差

$$\Delta h_0 = \frac{1}{1+k} \left\{ \left[ \frac{1}{m_4^s} (\epsilon_{v0}^p + \epsilon_{v0}^s) \right]^{m_5^s} - \left( \frac{1}{m_4} \epsilon_{v0}^p \right)^{m_5} \right\} \quad (18)$$

式中  $\epsilon_{v0}^p$  为干土在各向等压  $p_0$  作用下的塑性体应变； $\epsilon_{v0}^s$  为干土在各向等压  $p_0$  作用下的湿化体应变； $m_4$ 、 $m_5$  为干土硬化参数中的试验常数； $m_4^s$ 、 $m_5^s$  为饱和土硬化参数中的试验常数。

### 3.4 湿化过程的应力应变关系的计算

通过式 (18) 计算出湿化前后的硬化参数之差  $\Delta h = \Delta h_0$ ，然后根据式 (9) 和 (17) 所示的关系，就可以方便地计算出任意应力状态下的两个湿化应变分量  $\bar{\epsilon}^s$  和  $\epsilon_v^s$ 。计算的结果见图 5。从图 5 中可以发现一个有趣的现象，即在试验中当应力状态不变时，土样浸水发生明显的体应变和轴向应变，当湿化以后再加载时，应力应变曲线明显变陡。这一试验结果可为清华弹塑性模型合理地解释和反映：在图 6 中，湿化前土样处于应力状态 A 点，相应的屈服面为  $f_0$ 。在湿化以后，产生了较大的塑性湿化应变（单线法试验的湿化应变大于双线法），它使硬化参数增加，相应的屈服面发展到  $f_1$ 。但是由于应力状态没有变化，其目前的应力状态表示它实际上仍然位于屈服面  $f_0$  上，这时屈服面  $f_1$  相当于其“前期屈服面”，这类似于超固结土，从  $f_0$  到  $f_1$  的荷载增加过程只发生弹性变形（A 到 C 点），使计算的应力应变曲线也变陡，从而有效地预测了试验中湿化前后土的应力应变关系曲线。

可见只需进行干土与饱和土的三轴试验，确定模型的有关参数，再进行各向等压的湿化试验，就可以计算湿化过程的应力应变关系。

## 4 非饱和土的清华弹塑性模型

目前，国内外已经提出了不少非饱和土的本构模

型<sup>[11, 12]</sup>, Alonso 弹塑性模型在非饱和土中得到了较为广泛的应用, 它采用净应力(net stress)和吸力(suction)两个变量体系来描述非饱和土体的变形性状, 建立非饱和土吸力与土体应变的关系。但是基质吸力不易实时量测, 它对于土的强度、变形的影响十分复杂, 因而与吸力有关的参数的确定是主要的难点。在建立非饱和土的清华模型时, 结合湿化模型的做法, 在其硬化参数中加入土的含水率, 亦即包括了应力张量与含水率导致应变的两个变量, 应力的变化可以产生弹性或者塑性应变, 而含水率的增加则只产生塑性应变, 二者均可用增量进行计算。这样可以绕过吸力, 建立非饱和土的弹塑性本构模型。该模型无需引入吸力, 可以计算不同含水率下非饱和土的应力应变关系及增湿过程土的变形, 这可能是一条非饱和土工程设计计算的简便途径。在非饱和土本构模型中涉及水量变化此前也有一些尝试<sup>[13, 14]</sup>, 但没有绕过吸力这一概念。

4.1 增湿试验

试验采用白河堡粉质粘土, 土粒比重  $G_s = 2.71$ , 塑性指数  $I_p = 10.1$ , 最大击实干密度  $\rho_{dmax} = 1.69 \text{ g/cm}^3$ , 最优含水率  $w_{op} = 16\%$ 。试样干密度为  $\rho_d = 1.30 \text{ g/cm}^3$ , 含水率为天然风干含水率 2.85%, 用天然风干含水率和其他不同含水率的试样分别进行各向等压和不同围压的三轴试验, 确定清华弹塑性模型的参数。然后在天然风干含水率试样制样时加入一定数量的冰屑, 使其在试验过程中规定的应力状态下融化, 从而在试验过程中均匀地增加试样的含水率, 量测融化过程的应变, 得到在不同应力状态下, 增加不同含水率时的增湿应变。作为建立模型和验证模型的试验基础。在含水率  $\leq 15\%$  时, 可以通过试样中预先加冰屑的方法, 对于更高的含水率则可通过通水管直接向试样加水的方法。

4.2 屈服面与屈服函数

通过不同含水率试样的三轴试验资料直接确定土的屈服轨迹, 与第 3 节一样, 试验结果表明, 不同含水率的试样得到的清华弹塑性模型屈服面形状是相同的, 屈服函数的表达式和参数也相同, 如式(3)所示。

4.3 硬化参数

不同含水率的试样的硬化参数不同, 它是含水率的函数。与湿化的情况相同, 增湿前后的应力状态没有变化, 这样在增湿前位于同一屈服面  $f_0$  上的所有应力状态增湿以后也应当向外扩张到同一个屈服面  $f_1$  上 (见图 6)。这样就可以只需完成各向等压  $p_0$  应力状态的增湿试验, 确定增湿前后的硬化参数之差  $\Delta h_0$ , 就可以计算在任意应力状态下, 增加任意含水率的硬化参数之差  $\Delta h = \Delta h_0$ 。这种硬化参数之差是由于单线法变形大于双线法而引起的。

通过加冰试验, 进行各向等压下不同增湿含水率试验, 总结出增湿体应变 - 等向压力关系曲线与湿后含水率 - 增湿体应变关系曲线, 并进行归一化整理 (见图 7 (b)) 得到

$$y = \frac{\varepsilon_{v0}^s}{\varepsilon_{v0}^p} = 1.3049 \ln w - 1.2606 \quad (19)$$

用清华模型建模的思想, 在式(6)中引进式(19), 最后可得出在等向增湿的路径下硬化参数的表达式如下:

$$h = \frac{p_0}{1+k} = \frac{\left\{ \frac{1}{m_4} \left[ \frac{\varepsilon_{v0}^w}{1.684 \ln w - 1.993} \right] \right\}^{\frac{1}{m_5}}}{1+k} \quad (20)$$

式中,  $\varepsilon_{v0}^w = \varepsilon_{v0}^p + \varepsilon_{v0}^s$ 。

4.4 试验验证

用上述的非饱和土清华模型的形式, 用来预测一定应力状态下, 增湿到一定含水率的三轴增湿试验。见图 8 所示。

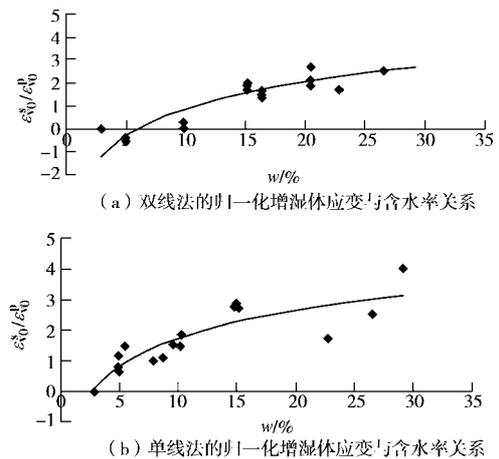


图 7 归一化增湿体应变  $\varepsilon_{v0}^s/\varepsilon_{v0}^p$  与含水率  $w$  关系曲线

Fig. 7 Curves of normalized volumetric strain  $\varepsilon_{v0}^s/\varepsilon_{v0}^p$  versus

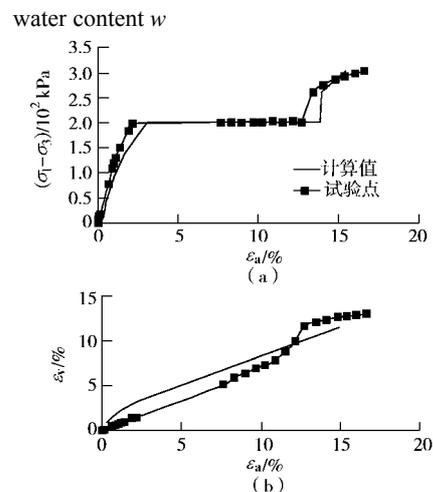


图 8 试验与计算的增湿试验结果

Fig. 8 Comparison between numerical results and test results

试验与计算的结果表明: 试验中随着增湿后含水

率增加, 基质吸力减小, 强度降低; 本模型计算可合理地预测出这种趋势; 试验和计算结果表明, 试样的抗剪强度只受围压和湿后含水率的影响而与具体在何种应力状态下增湿的过程无关; 此模型可计算任意应力状态、任意初始含水率 ( $p_1, q_1, w_1$ ) 到另一状态 ( $p_2, q_2, w_2$ ) 的增湿变形的全过程; 与湿化变形一样, 模型预测出了试验中增湿后再加载时初始段应力应变关系曲线变陡的现象, 同样可以用增湿过程使屈服面从  $f_0$  跳到  $f_1$ , 再加载过程只发生弹性变形来解释和计算。

非饱和土的清华模型只需进行不同含水率的三轴试验, 确定模型参数与含水率的函数关系, 再进行加冰的干土试样的各向等压增湿试验, 就可以完全确定模型。其中没有涉及吸力的概念, 形式和试验简便, 十分有利于非饱和土的工程计算。

### 5 反映土应变软化的清华弹塑性模型

密砂与超固结粘土的应力应变曲线经常是应变软化的, 为了描述这种应变软化, 很多土的弹塑性模型都在这方面作了研究工作。Lade-Duncan 的修正模型采用塑性功为硬化参数, 可以反映密砂的应变软化现象<sup>[15]</sup>。近年来使用损伤模型能够更方便地反映土的这一变形特性<sup>[16]</sup>。

#### 5.1 屈服面与屈服函数

用密实的永定河砂进行了系统的三轴试验, 试验结果表明这种试样的应力应变关系具有明显的应变软化现象。对于试验结果进行分析发现, 应变软化部分的塑性应变增量方向准确地正交于通过应变硬化段所确定的屈服轨迹。见图 9 所示。屈服函数可以采用式 (3) 表示。

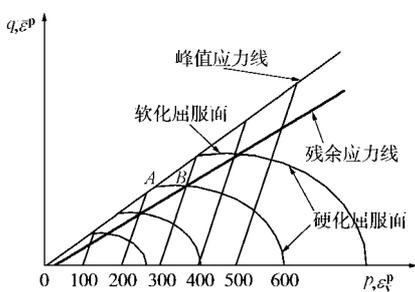


图 9 密实永定河砂的试验确定的屈服面

Fig. 9 Yield surface determined by tests of dense Yongding River sand

#### 5.2 硬化参数

在反映应变软化的清华弹塑性模型中, 硬化参数表示为塑性功的函数<sup>[17]</sup>。在试验中, 塑性功的计算如下:

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (21)$$

塑性功与硬化参数间的函数关系 (见图 10) 表示为

$$h - h_0 = \frac{W_p(a + cW_p)}{(a + bW_p)^2} \quad (22)$$

式中,  $h_0$  为试样各向等压下固结时的硬化参数。

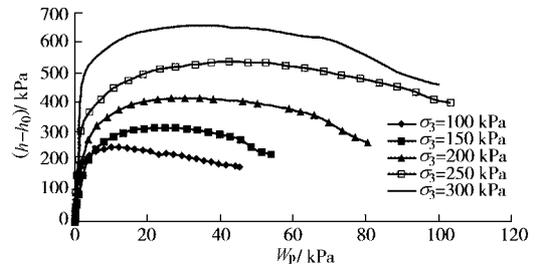


图 10 各种围压下试验得到的塑性功与硬化参数关系

Fig. 10 Curves of hardening parameter versus plastic work of dense Yongding River sand

#### 5.3 数值计算与试验验证

对所建立的应变软化模型, 利用承德中密砂的厚壁筒试验及永定河密砂的浅基础渗水力模型试验进行了验证。其中渗水力模型试验的比尺分别为  $n = 20$ 、40、45.7 和 57.1, 模拟位于永定河密砂地基上的直径为 1.6 m 的圆形刚性浅基础。图 11 表示了试验的结果, 图中纵坐标  $\alpha = p_m / \gamma_m d_m$ , 其中  $p_m$  为作用在模型基础上的压力,  $\gamma_m$  为模型地基土的容重,  $d_m$  为模型基础的直径。图中横坐标  $\beta = s_m / d_m$ , 其中  $s_m$  是模型的沉降。可见不同模型比尺的无量刚表示的荷载-沉降曲线都比较一致, 反映了试验的一致性。对于这一边值问题, 用反映应变软化的清华模型进行有限元数值计算, 结果见图 11 中的实线。

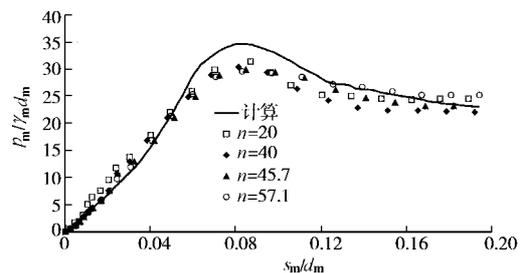


图 11 浅基础的渗水力模型试验的荷载沉降曲线与模型的有限元计算结果比较

Fig. 11 Comparison of load-settlement curve between numerical results and model test results

数值计算表明, 在荷载增加到一定值, 首先在与基础相连的地基土中出现应变软化区域, 在该区域中的单元发生应变软化, 但是仍处于加载阶段; 而与这个区相邻的单元则处于卸载阶段。随着应变软化区的出现沉降很快加大, 发生地基破坏。计算的结果与模

型试验在各个阶段符合的都较好<sup>[18]</sup>。

## 6 减载与循环荷载下屈服的清华弹塑性模型

土作为一种典型的弹塑性材料,在循环荷载条件下,其塑性体变形的累计引起了砂土液化等一系列重要的工程问题。为了反映土在循环荷载条件下变形的弹塑性特性,先后发展了各种运动硬化的弹塑性本构模型,如各种多重屈服面模型<sup>[19]</sup>和边界面模型<sup>[20]</sup>等。也有部分学者主张抛开传统的弹塑性理论的概念,提出将变形区分为可恢复变形和不可恢复变形,分别讨论其机理和变化规律<sup>[21]</sup>。

### 6.1 减载弹塑性和减载屈服

大多数弹塑性模型都假定土在减载到初始应力水平过程中的宏观可恢复变形为弹性变形,也就是说土的减载即为弹性卸载,在一个应力循环中,只发生弹性变形。但大量的试验资料都表明,这种假定的合理性有待讨论,土在减载过程中表现出了强烈的塑性变形特点,应力循环时出现了滞回圈,减载体缩<sup>[22, 23]</sup>,平面应变条件下减载主应力转化<sup>[24]</sup>等一些特殊的应力变形现象。这些试验现象都说明土的减载过程不能简单的看作弹性卸载,由于其中一些颗粒会发生滑移、转动,他们在再加载时可以恢复,土在减载过程中会发生屈服,产生了塑性变形。这对于一些工程问题是需要严格区分的。

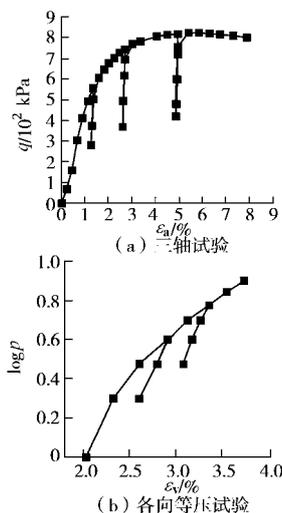


图 12 加载减载一半的循环加载试验结果

Fig. 12 Curves of half stress cyclic tests

为了反映土在减载过程中的屈服和塑性变形,就必须对传统的弹性变形的定义方法进行修改,基于土体变形的微观机理定义弹性变形。用承德中密砂进行了各向等压和三轴压缩的应力半循环试验:减载到所施加应力水平的一半时就进行再加载,可以发现在这

种半循环试验中,土的应力应变关系基本可近似视为线弹性,见图 12。

可以认为这种变形是土颗粒的弹性压缩回弹的宏观表现,是一种基于微观变形机理的真正意义上的弹性变形,将减载至应力水平一半过程中线弹性卸载的变形视为弹性变形。根据承德中密砂的试验资料,可以得到相应的弹性常数。用  $K$ 、 $G$  分别表示其体积压缩模量和剪切变形模量。

### 6.2 旋转硬化的清华弹塑性模型

按照清华模型的建模方法,由试验资料确定屈服面和屈服函数。根据承德中密砂的常规三轴压缩试验结果,用由上述试验所得到的弹性常数,分别计算和分离加载,减载及再加载过程中的弹性应变和塑性应变,进而得到塑性体应变分量和塑性剪应变分量及其相应的增量。这样就可以分别得到在加载、减载和再加载 3 个过程中的塑性应变增量的大小和方向。将加载、减载和再加载 3 个过程中的塑性应变增量方向及相应的屈服面绘制在  $q-p$  坐标系中,见图 13。可以发现,在减载和再加载时,屈服面可以近似看作是加载时的屈服面绕着原点转过一个角度得到的,亦即减载和再加载时的塑性应变增量是正交于旋转后的屈服面的。这是一种以试验结果作为依据的旋转硬化规律。Lade 等人在大应力转折的非相关流动砂土本构模型研究中,也曾引入类似的运动硬化规律<sup>[25, 26]</sup>。

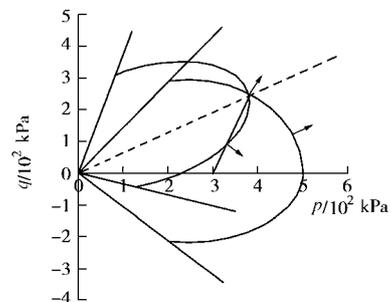


图 13 减载过程中的旋转硬化

Fig. 13 Rotational hardening during decreasing load

### 6.3 试验验证

按照屈服面随着在应力反复时应力路线绕原点转动的旋转硬化的规律,根据承德中密砂的试验结果,以硬化参数为塑性体应变和塑性剪应变的函数,确定合适的函数关系,可以满足相适应的流动法则。通过等向压缩和三轴压缩试验确定相应的模型参数,并用该旋转硬化的清华弹塑性模型模拟常规三轴试验条件下的应力应变关系,见图 14。

从土的弹塑性变形的基本概念和基本理论出发,通过引入基于颗粒弹性压缩回弹的狭义弹性变形概念,运用清华弹塑性模型通过试验数据确定屈服面的

方法, 遵循旋转硬化的运动硬化规律, 可以方便的建立旋转硬化的弹塑性本构模型, 而且并未引入新的模型参数和增加模型的复杂性, 在反映减载弹塑性方面取得了较为理想的效果。在等向硬化的清华弹塑性本构模型的基础上, 进一步发展了反映减载和循环荷载下土的屈服的清华弹塑性模型, 并成为由静本构模型通往动本构模型的桥梁。

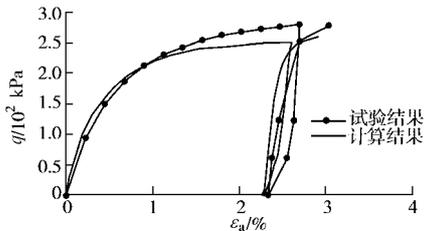


图 14 旋转硬化清华模型计算结果与试验结果对比

Fig. 14 Comparison between calculated results and test results

## 7 结 语

清华模型以其独特的建模方式闻名于世, 在这一基础上, 它具有广阔的发展空间。本文系统地介绍了模型的二维、三维形式, 描述土的湿化变形、非饱和土应力应变关系、应变软化和表现减载和循环荷载下变形特性的清华模型。

(1) 土的清华弹塑性模型的精髓在于其屈服面的确定, 即在 Drucker 公设的基础上, 选择合适的硬化参数, 通过试验资料直接确定模型的屈服函数, 无需任何附加的假设。

(2) 在真三轴试验的基础上, 按照清华模型的建模方法和 $\pi$ 平面上破坏轨迹与屈服轨迹相似的原理, 在 $\pi$ 平面上确定了屈服轨迹的形状, 使用双圆弧的函数表达式, 合理地发展了清华模型的三维形式, 只需加作一个三轴伸长试验确定强度确定参数  $t_0$ 。就可确定三维的清华模型。

(3) 土的浸水湿化变形是一种塑性变形, 试验表明湿化应变向量正交于清华模型的屈服面。清华模型可以较好地预测土在任意应力状态下的湿化变形和湿化前后的应力应变关系, 利用干土和浸水饱和后的硬化参数之差可以反映湿化后土的弹性变形阶段。

(4) 在清华模型的硬化参数中加入含水率这一因素, 可将清华模型扩展应用到非饱和土。用在试样中预先加入冰屑的各向等压试验可以确定增湿计算的有关参数, 三轴试验证明了模型的可用性。

(5) 反映应变软化的清华模型表明, 硬化与软化段的屈服面形状是一致的。选择硬化参数为塑性功的函数就可以合理地反映土的应变软化, 模型试验和数值计算结果表明模型的适用性。

(6) 为了表现减载和循环荷载下土的屈服, 可以将清华模型的屈服面旋转硬化, 适当地变化硬化参数就可以使该模型表现减载和循环荷载下的应力应变关系, 为模型的进一步扩展创造条件。

致谢: 本文的研究成果包括了我的学生郭瑞平、张其光、司韦在他们的学位论文中的辛勤工作, 在此对他们表示感谢。也感谢介玉新、张其光在撰写论文中给予的帮助。

## 参考文献:

- [1] ROSCOE K H, et al. On the yielding of soils [J]. Geotechnique, 1958, (1).
- [2] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, THURAIRAJAH A. Yielding of clays in states wetter than critical [J]. Geotechnique, 1963, 13(3): 211 – 240.
- [3] DRUKER D C, GIBSON R E, HENKEL D J. Soil mechanics and work hardening theories of plasticity[J]. Proc ASCE Trans, 1957, 122.
- [4] HUANG Wen-xi, PU Jia-liu, CHEN Yu-jiong. Hardening rule and yield function for soils[C]// Proc 10th Int Conf Soil Mech Foun Engg (1). 1981, 631.
- [5] 李广信. 土的三维本构关系的探讨与模型验证[D]. 北京: 清华大学, 1985. (LI Guang-xin. A study of three-dimensional constitutive relationship of soils and an examination of various models [D]. Beijing: Tsinghua University, 1985.)
- [6] LI Guang-xin, PUI Jia-liu. Determination and verification of yield loci on the deviatoric plane of elasto-plastic model of soil[C]// Proc Int Conf Computational Plasticity, 1987.
- [7] 景来红. 粘性土平面不排水特性及土石坝有效应力分析[D]. 北京: 清华大学, 1990. (JING Lai-hong. Undrained properties of compacted clay in plane strain condition and analysis of effective stress for rock-fill earth dam by FEM [D]. Beijing: Tsinghua University, 1990.)
- [8] 韦忠欣. 高塑性土在土石坝混凝土防渗墙与心墙连接中的应用研究[D]. 北京: 清华大学, 1994. (WEI Zhong-xin, A study of the effect of high plasticity soil on interaction between concrete cutoff wall and core of rock-fill dam [D]. Beijing: Tsinghua University, 1994.)
- [9] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)
- [10] 李广信. 堆石料的湿化试验和数学模型[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(5): 58 – 64. (LI Guang-xin. Experimental study and mathematic simulation on wettig behavior of rock fill[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, 12(5): 58

- 64.)
- [11] 沈珠江. 广义吸力和非饱和土的统一变形理论[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(2):1-8. (SHEN Zhu-jiang. Generalized suction and unified deformation theory for unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(2):1-8.)
- [12] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. Geotechnique, 1990, 40:405-430.
- [13] 陈正汉, 周海清, FREDLUND D G. 非饱和土的非线性模型及其应用[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(5): 603-608. (CHEN Zheng-han, ZHOU Hai-qing, FREDLUND D G. Nonlinear model for unsaturated soils and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(5): 603-608.)
- [14] 方祥位, 陈正汉, 申春妮, 孙树国. 剪切对非饱和土土-水特征曲线影响的探讨[J]. 岩土力学, 2004, **25**(9):1451-1454. (FANG Xiang-wei, CHEN Zheng-han, SHEN Chun-ni, SUN Shu-guo. A study on effect of shear on soil-water characteristic curve of an unsaturated soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(9):1451-1454.)
- [15] LADE P, DUNCAN J M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soils [J]. Proc ASCE JGTG, 1975, **101**(10).
- [16] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHEN Zhu-jiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: Chinese Waterpub, 2000.)
- [17] 郭瑞平, 李广信. 以塑性功函数为硬化参数的弹塑性模型[J]. 清华大学学报, 2000, **40**(5):125-127. (GUO Rui-ping, LI Guang-xin. Elasto-plastic model of soil with a function of plastic work as the hardening function[J]. Journal of Tsinghua University(Sci & Tech), 2000, **40**(5): 125-127.)
- [18] 郭瑞平, 李广信, 阪上最一. 土的应变软化模型及其在边值问题中的应用[J]. 清华大学学报, 2000, **40**(8):105-107. (GUO Rui-ping, LI Guang-xin, SAIICHI Sakajo. Constitutive model for soil with strain-softening behavior and its application in boundary value problems[J]. Journal of Tsinghua University(Sci & Tech), 2000, **40**(8): 105-107.)
- [19] MROZ Z. On the description of anisotropic work hardening[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1967, **15**:163-175.
- [20] DAFALIAS Y F, HERRMANN L R. A bounding surface soil plasticity model[C]// Int Symp on Soils under Cyclic and Transient Loading. Swansea, 1980, 1:335-346.
- [21] 张建民. 砂土的可逆性和不可逆性剪胀规律[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(1):12-17. (ZHANG Jian-min. Reversible and irreversible dilatancy of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(1):12-17.)
- [22] 李广信, 郭瑞平. 土的卸载体缩和可恢复剪胀[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(1):158-161. (LI Guang-xin, GUO Rui-ping. Volume-contraction in unloading of shear tests and reversible dilatation of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(2):158-161.)
- [23] 李广信, 武世峰. 土的卸载体缩的试验研究及其机理探讨[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(1):47-50. (LI Guang-xin, WU Shi-feng. Experimental research on volume-contraction of soil under unloading and examination of its mechanism[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(1):47-50.)
- [24] 李广信, 黄永男, 张其光. 土体平面应变方向上的主应力[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(3):358-361. (LI Guang-xin, HUANG Yong-nan, ZHANG Qi-guang. The principal stress of soil in the direction of plane strain[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(3):358-361.)
- [25] LADE P V, BOONYACHUT S. Large stress reversals in triaxial tests on sand[C]// Proc of the 4th International Symposium on Numerical Model in Geomechanics Edmonton, 1982:171-182.
- [26] LADE P V, INEL S. Rotational kinematic hardening model for sand. Part I: Concept of rotating yield and plastic potential surfaces[J]. Computer and Geotechnics, 1997, **21**(3):83-216.

#### 附注:

自1998年黄文熙讲座开设以来, 2006年度为第九讲, 本讲首次举行讲座报告会。黄文熙讲座第九讲于2006年1月10日在南京水利科学研究院国际会议厅隆重开讲。